RDM

Sollicitations simples – Charges concentrées

EXERCICE 1 (fiche 1)

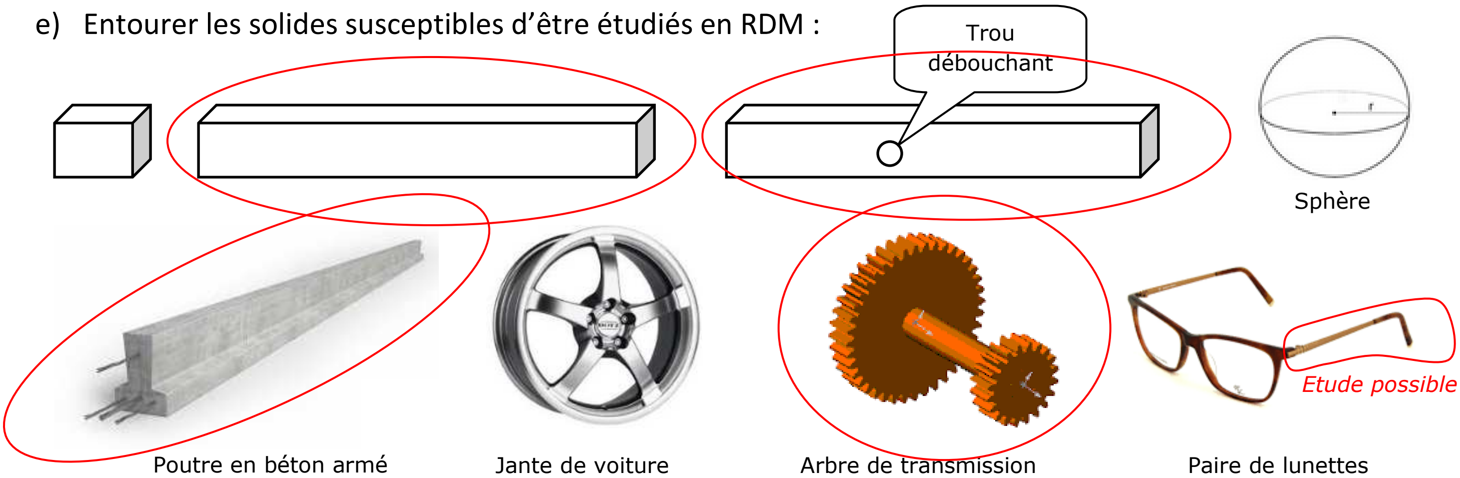
a) De quelle grande théorie la RDM est-elle issue ? La mécanique des milieux continus (MMC)

b) Citer les trois éléments mis en jeu en RDM : Géométrie, chargement (efforts), matériau

c) Rappeler ce qu'est un matériau homogène : mêmes propriétés en tout point

d) Rappeler ce qu'est un matériau isotrope : mêmes propriétés dans toutes les directions

e) Entourer les solides susceptibles d'être étudiés en RDM :



f) Que dire des résultats fournis par la RDM si on les applique à des solides qui ne respectent pas ses hypothèses ? les résultats seront mathématiquement justes mais physiquement faux.

EXERCICE 2 (Traction)

On considère une tige cylindrique en acier 14 NiCr 11 de diamètre $d = 10\ mm$; de longueur $L = 500\ mm$ soumise à une force de traction $F = 26\ kN$.

a) Dire pourquoi on a le droit de l'étudier en RDM.

On a un acier, donc le matériau est homogène et isotrope ; la géométrie est de type « poutre » (rapport L/d correct => les hypothèses de la RDM sont vérifiées => on peut utiliser la RDM.

b) Calculer la contrainte σ qui règne dans la matière.

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \times 26000}{\pi \times 10^2} = \underline{331\ MPa}$$

c) En déduire si la pièce casse (par simple comparaison de σ avec la limite élastique R_e).

Pour l'acier 14 NiCr 11, sa limite élastique est $R_e = 830\ MPa$ on a donc $\sigma << R_e$ => la pièce ne casse pas.

On considère un coefficient de sécurité $s = 3$.

d) La pièce est-elle toujours correctement dimensionnée ?

Le coefficient de sécurité permet de calculer la résistance pratique à l'extension, R_{pe} :

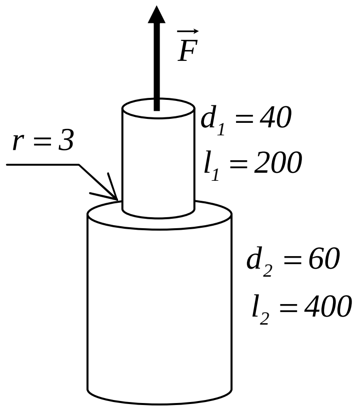
$$R_{pe} = \frac{R_e}{s} = \frac{830}{3} = 276{,}7\ MPa$$

La condition de résistance devient alors $\sigma \leq R_{pe}$

Or, $\sigma = 331\ MPa$ et $R_{pe} = 276{,}7\ MPa$

=> avec un coefficient de sécurité égal à 3, la pièce n'est pas correctement dimensionnée.

EXERCICE 3 (Traction)



On considère la pièce ci-contre faite en « Cu Zn 39 Pb 2 » et soumise à une force de traction $F = 305\ kN$.

a) Calculer la contrainte nominale σ qui règne dans la matière du petit cylindre (c'est le plus fragile des deux).

La section la plus sollicitée est celle de plus petit diamètre => on ne s'intéresse effectivement qu'à elle.

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \times 305000}{\pi \times 40^2} = \underline{242{,}7\ MPa}$$

b) Déterminer le coefficient de concentration de contrainte K_t.

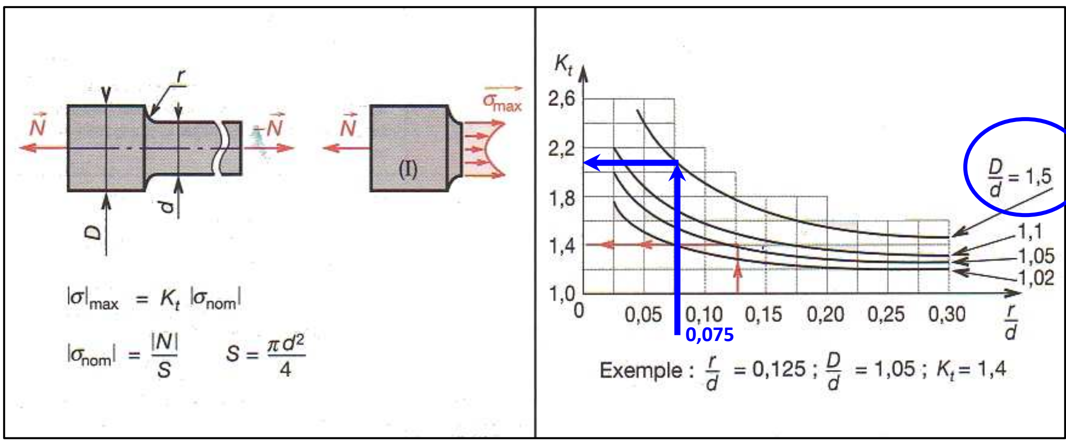
La pièce travaille en traction => Annexe B.

L'arbre est épaulé => 1er tableau

La lecture du tableau montre qu'il faut calculer deux choses :

- le rapport r / d = 3 / 40 = 0,075 (=> choix de l'abscisse)
- le rapport D / d = 60 / 40 = 1,5 (=> choix de la courbe)

=> $\underline{K_t = 2{,}05}$ (lecture sur l'axe des ordonnée)



c) Calculer la contrainte maximale σ_{max} qui règne dans la matière.

La contrainte maximale σ_{max} correspond à la contrainte nominale σ multipliée par le coefficient de concentration de contraintes K_t :

$$\sigma_{max} = K_t \times \sigma = 2{,}05 \times 242{,}7 = \underline{497{,}5\ MPa}$$

On considère un coefficient de sécurité $s = 2$.

d) Calculer la résistance pratique à l'extension R_{pe}.

L'énoncé donne le matériau : « Cu Zn 39 Pb 2 » (alliage de cuivre) ; on a $R_e = 200\ MPa$

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s} = \frac{200}{2} = \underline{100\ MPa}$$

e) Conclure quant au bon ou mauvais dimensionnement de la pièce.

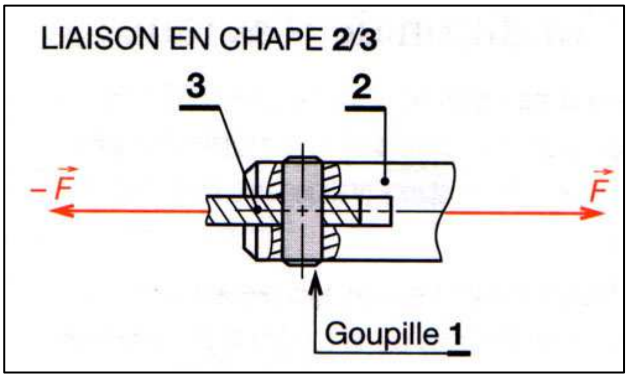
Un bon dimensionnement (si on ne veut pas que ça casse) vérifie la condition de résistance $\sigma_{max} \leq R_{pe}$.

Or, $\sigma_{max} = 497{,}5\ MPa$ et $R_{pe} = 100\ MPa$

=> Ca ne va pas du tout, la pièce casse.

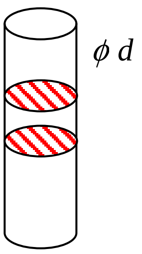
EXERCICE 4 (cisaillement)

On s'intéresse à la goupille (1) faite en acier C80. De part les efforts $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ appliqués aux pièces (2) et (3), la goupille (1) a tendance à être cisaillée.
On donne $F = 1560\ daN$.



a) On a affaire à du cisaillement : ☐ simple ☑ double

b) Dessiner la goupille (1) seule et faire apparaître la(les) section(s) sollicitée(s) au cisaillement.



On considère un coefficient de sécurité $s = 4$.

c) Calculer le diamètre d de la goupille pour qu'elle résiste aux efforts qui lui sont appliqués.

☞ *Attention, comme on a ici une contrainte tangentielle, on travaille avec R_g et pas R_e.*

Cherchons déjà l'expression de la contrainte…

On a ici des contraintes tangentielles, notées τ ; F est l'effort de cisaillement. Mais attention, il y a 2 surfaces S car c'est du cisaillement double !

Donc : $\tau = \dfrac{F}{2 \times S}$ avec $S = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow \tau = \dfrac{4 \cdot F}{2 \cdot \pi \cdot d^2} \Rightarrow \tau = \dfrac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$

Quant à la condition de résistance en cisaillement, on a ici :

$\tau \leq R_{pg}$ avec $R_{pg} = \dfrac{R_g}{s} = \dfrac{500}{4} = 125\ MPa$

Soit, à la limite (cas de l'égalité) :

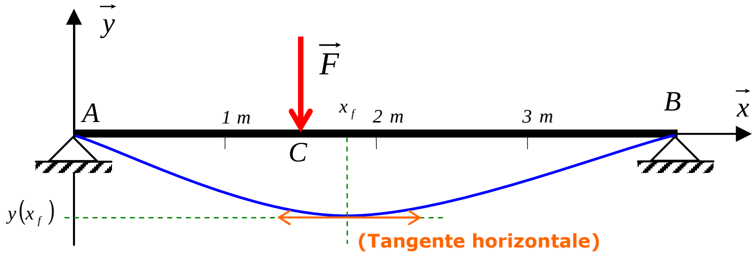
$$\tau = R_{pg} \Rightarrow \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = R_{pg} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\pi \cdot R_{pg}}} = \sqrt{\frac{2 \times 15600}{\pi \times 125}} = \underline{8{,}9\ mm}$$

EXERCICE 5 (flexion ; un peu difficile…)

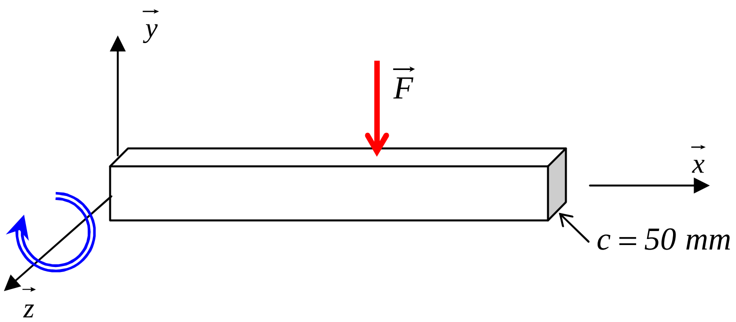
On considère une poutre en acier 14 NiCr 11 sur deux appuis en A et B et une charge concentrée $\vec{F}$ en C.

On a $F = 20\ daN$, $AB = 4\ m$ et $AC = 1{,}5\ m$; la section droite de la poutre est un carré de côté $c = 100\ mm$.

On considère un coefficient de sécurité $s = 2$.



a) Calculer le moment quadratique I_{GZ} de la section droite.



$$I_{GZ} = \frac{c \cdot c^3}{12} = \frac{c^4}{12} = \frac{100^4}{12} = \underline{8{,}3 \cdot 10^6\ mm^4}$$

La ligne neutre de la poutre est sur l'axe $\vec{x}$ et les efforts sur l'axe $\vec{y}$; les rotations ont donc lieu autour de l'axe $\vec{z}$ et c'est pourquoi il faut prendre le moment quadratique I_{GZ}

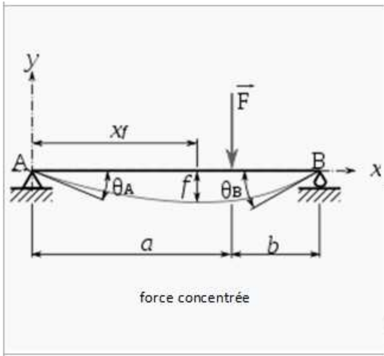
A partir de l'annexe F :

b) Pourquoi l'annexe F convient mieux que l'annexe G ?

Parce que la poutre qui nous est donnée repose sur deux appuis simples ; elle n'est pas encastrée.

c) Calculer l'abscisse x_f pour laquelle la déformée est la plus grande (c'est ce qu'on appelle « la flèche »).

Il faut utiliser ceci :



$$f = -\frac{Fb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL} \qquad \theta_A = \frac{Fab(L+b)}{EIL}$$

$$x_f = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}} \qquad \theta_B = \frac{Fab(L+a)}{EIL}$$

$$x \leqslant a : y = \frac{Fbx}{6EIL}(x^2+b^2-L^2)$$

$$x \geqslant a : y = \frac{Fa}{6EIL}(x^3-3L^2x^2+(a^2+2L^2)x-a^2L)$$

Beurk !

Ces formules sont construites à partir des lois générales de la RDM et appliquées aux cas particuliers qui sont considérés dans le formulaire ; ça permet de gagner du temps (ça évite d'avoir à tout construire en partant des formules générales).

x_f est l'abscisse de la plus grande déformée, appelée la flèche f ; le formulaire donne :

$$x_f = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}} = \sqrt{\frac{AB^2-CB^2}{3}} = \sqrt{\frac{4^2-(4-1{,}5)^2}{3}} = \underline{1{,}803\ m}$$

Pour l'abscisse x_f précédemment calculée :

d) Calculer la flèche f ; compléter la figure ci-dessus en traçant la déformée et en identifiant x_f et $f(x_f)$.

$$f = -\frac{F \times BC \times (AB^2-BC^2)^{3/2}}{9 \times \sqrt{3} \times E \times I_{GZ} \times AB} = -\frac{200 \times 2500 \times (4000^2-2500^2)^{3/2}}{9 \times \sqrt{3} \times 210000 \times 8{,}3 \cdot 10^6 \times 4} = \underline{-140{,}1\ mm}$$

ATTENTION AUX UNITES !!!!

Le signe « - » n'est pas ici d'une grande importance ; il traduit le fait que la déformation a lieu sur les Y négatifs.

e) Calculer le moment de flexion $M_{fZ}(x_f)$ à l'abscisse x_f avec $M_{fZ}(x_f) = (x_f - AC) \times F$.

$M_{fZ}(x_f) = (x_f - AC) \times F = (1{,}803 - 1{,}5) \times 200 = 60{,}6\ N \cdot mm$ **ATTENTION AUX UNITES !!!!**

f) Calculer la contrainte maximale σ_{max} dans la section droite à l'abscisse x_f .

On est en flexion ; la contrainte est normale (donc notée σ) et est donnée par la relation :

$$\sigma = \frac{M_{fz} \cdot y}{I_{GZ}}$$

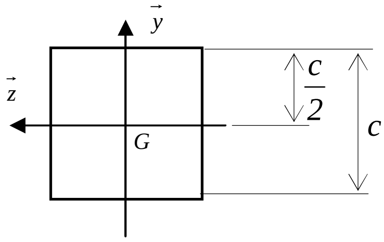
On le voit, σ dépend de y ; c'est quoi y ? C'est la position du point où on calcule la contrainte par rapport à la ligne neutre : plus on est loin de la ligne neutre (plus y est grand), plus la contrainte σ est grande.

Donc on prend quelle valeur pour y ?

Et bien la plus grande possible en partant de la ligne neutre (le point G dans la figure ci-dessous), y_{max} !

Et c'est laquelle ? Il faut regarder la section en face ; ici c'est facile, c'est un carré de côté $c = 100\ mm$:

Donc on a $y_{max} = \frac{c}{2} = \frac{100}{2} = 50\ mm$



Ca fait beaucoup de choses, hein ?

On peut maintenant calculer la contrainte maximale :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fz} \cdot y_{max}}{I_{GZ}} = \frac{60{,}6 \times 50}{8{,}3 \cdot 10^6} = 3{,}6 \cdot 10^{-4}\ MPa$$

g) Essayer d'expliquer la très faible valeur de la contrainte σ_{max} .

La contrainte est très faible (presque nulle) ; c'est normal, car la charge $F = 20\ daN$ n'est pas très élevée pour une section de 100 x 100.

Et il faut bien voir ici qu'**<u>on n'a pas considérer le poids propre de la barre</u>**, ce qui changerait sensiblement les résultats mais on ne va pas le faire car ça fait encore plus de choses et pour le moment ça suffit…

Quoi que ; juste pour avoir un ordre de grandeur, calculons le poids de la poutre :

Son volume : $V = surface\ section\ droite \times longueur = c^2 \times AB = 0{,}1^2 \times 4 = 0{,}04\ m^3$

Sa masse volumique : $\rho = 7800\ kg \cdot m^{-3}$ (prise dans l'annexe dans la section « Matériaux »)

Sa masse : $m = \rho \times V = 7800 \times 0{,}04 = 312\ kg$

Son poids : $P = m \times g = 312 \times 9{,}81 = 3061\ N$

$\frac{P}{F} = \frac{3061}{200} \approx 15$ => Le poids propre de la poutre est **15 fois** plus grand que le chargement donné ; à coup sur, son effet que nous avons négligé n'est pas négligeable (comme si la poutre était dans l'espace, loin de tout champ de pesanteur, mais après tout, c'est peut être le cas !).